

AJUSTE DE LA CURVA DE PROBABILIDAD DEL ESCURRIMIENTO MEDIO HIPERANUAL ANUAL SEGÚN LA TEORÍA S_B JOHNSON.

Revista Voluntad Hidráulica No. 57, 1981. Páginas 58-64

RESUMEN

Se informa sobre el desarrollo del método de distribución de las probabilidades del escurrimiento medio hiperanual, según la teoría S_B Johnson. Se presenta un ejemplo de cálculo con los datos del río San Diego, Pinar del Río.

Introducción

Las observaciones hidrométricas que comenzaron aproximadamente hace dos décadas, han facilitado la recopilación de datos hidrológicos necesarios en la argumentación de esquemas y proyectos hidroeconómicos.

Hasta la etapa actual, la distribución de las probabilidades del escurrimiento medio hiperanual (25, 50, 75, 95%, etc.), se ha calculado determinando un coeficiente de variación de una forma indirecta y asumiendo una asimetría igual a dos veces este coeficiente.

Existen varios métodos estadísticos aplicables en Hidrología para el ajuste de curvas de probabilidades a los puntos observados (momentos, máxima verosimilitud, cuantiles). El objetivo de este trabajo es dar a conocer la distribución S_B Johnson, para determinar el escurrimiento de distintas probabilidades, que como se verá más adelante permite un ajuste más exacto cuando se tienen series cortas de observaciones.

De manera que, si se utiliza en forma óptima el cálculo electrónico, éste es uno de los mejores métodos para determinar el escurrimiento medio hiperanual, para distintas probabilidades, cuando existen series registradas.

Desarrollo del método

La transformación Johnson presenta, en su forma general, el tipo siguiente:

$$\delta > 0, -\infty < \gamma < \infty \quad (1)$$

$$\eta = \gamma + \delta \tau + (x; \varepsilon, \lambda) \quad (2)$$

$$\lambda > 0, -\infty < \varepsilon < \infty; \quad (3)$$

siendo,

x - variable aleatoria para la cual seleccionamos la distribución Johnson; τ – una función cualquiera; γ , δ , ε , λ – parámetros de distribución; η – variable normalizada según la ley de distribución normal con los parámetros (0,1).

Johnson propuso tres tipos de funciones o familias:

$$\text{I.- } \tau_1(x; \varepsilon, \lambda) = \ln((x - \varepsilon)/\lambda), \quad x \geq \varepsilon; \quad (4)$$

$$\text{II.- } \tau_2(x; \varepsilon, \lambda) = \ln(x - \varepsilon/\lambda + \varepsilon - x), \quad \varepsilon \leq x < \varepsilon + \lambda; \quad (5)$$

$$\text{III.- } \tau_3(x; \varepsilon, \lambda) = \text{Arcsen}(x - \varepsilon/\lambda), \quad -\infty < x < \infty \quad (6)$$

Las densidades de distribución correspondientes tienen el tipo:

$$\text{I.- } f_1(x) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi(x-\varepsilon)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta^2\left[\frac{\lambda^*}{\delta} + \ln(x-\varepsilon)\right]^2\right\} \quad (7)$$

$$\text{II.- } f_2(x) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda}{(x-\varepsilon)(\lambda+\varepsilon-x)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\lambda + \delta \ln\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda+\varepsilon-x}\right)\right]^2\right\} \quad (8)$$

$$\text{III.- } f_3(x) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{(x-\varepsilon)^2 + \lambda^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\lambda + \delta \ln\left\{\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda}\right) + \left[\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\right)^2\right] \quad (9)$$

donde,

$f_1(x)$ - distribución log-normal con tres parámetros, también llamados, familia de distribución S_L Johnson; $f_2(x)$ - familia de distribución S_B Johnson con cuatro parámetros de distribución; $f_3(x)$ - familia de distribución S_U Johnson, también con cuatro parámetros de distribución.

De las fórmulas presentadas se desprende que las distribuciones S_L , S_B , S_U se aplican, respectivamente, para variables aleatorias limitadas por un extremo (I tipo), por arriba y por abajo (II tipo), y finalmente, por variables no limitadas (III tipo).

Desde el punto de vista de los procesos hidrológicos, la que más interesa es la distribución S_B Johnson, limitada por ambos extremos (II), ya que la misma cubre la mayor parte de los ríos.

La densidad de la distribución S_B puede escribirse de la forma siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\delta_\tau \sqrt{2\pi}} \frac{b-a}{(x-a)(b-x)} \exp\left\{-\frac{1}{2\delta_\tau^2} \left[\ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right) - m_\tau\right]^2\right\} \quad (10)$$

donde,

$b = \lambda + \varepsilon$; $a = \varepsilon$ -límites superior e inferior de la variable aleatoria x ;

$$m = -\frac{\delta}{\delta_\tau}, \text{ o sea, } \gamma = -\frac{1}{C_v} \quad (11)$$

m - esperanza matemática.

$\delta_\tau = \frac{1}{\delta}$ desviación típica C_v - coeficiente de variación.

Si tomamos una magnitud discreta como sería el escurrimiento anual, la ecuación:

$$\tau_1 = \ln \left(\frac{x_i - a}{b - x_i} \right) \quad (12)$$

(donde $x_i = \frac{Q_i}{Q_o}$ - coeficientes modulares de los gastos (Q_i) anuales observados, Q_o - gasto medio anual de la serie) tendrá una distribución normal; indudablemente, la ecuación:

$$\eta = \frac{\ln(x_i - a) - m_\tau}{\delta_\tau} \quad (13)$$

será también normal con los parámetros (0,1).

La ventaja de la distribución S_B Johnson estriba en que la misma describe muy bien el proceso de variabilidad del escurrimiento anual, aún mucho mejor que las distribuciones Pearson, y que, además, resulta muy adaptable a los modelos hidrológicos.

Utilizando la evaluación de los parámetros y la tabla de valores de la función integral de distribución normalizada, puede obtenerse la distribución empírica, o curva de probabilidades, y comparar los resultados con los datos observados.

Al determinar los cuatro parámetros de distribución (a , b , m , δ_τ) tenemos el cuadro siguiente:

- a) Los valores extremos a y b son conocidos
- b) Conocemos solamente un valor extremo (a ó b)
- c) No contamos con ninguno de los dos valores.

Consideremos que para el escurrimiento son conocidos los dos valores extremos y analicemos los métodos de evaluación de los dos parámetros restantes.

La evaluación de la esperanza matemática m_τ y la desviación típica δ_τ de la sucesión normal τ_i , pueden determinarse con ayuda del método de los momentos que, como sabemos, para τ_i se obtienen los mismos resultados de la máxima verosimilitud:

$$m_{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{x_i - a}{b - x_i} \right)}{n} \quad (14)$$

$$\delta_{\tau} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left[\ln \left(\frac{x_i - a}{b - x_i} \right) - m_{\tau} \right]^2}{n-1}} \quad (15)$$

La determinación de los parámetros “a” y “b” se realiza combinando los datos de cada una de las cuencas fluviales y aceptando los pares de valores en los que el criterio χ^2 sea mínimo. El límite inferior “a”, varía desde un valor mínimo observado hasta cero, y el límite superior “b”, desde el valor máximo observado en adelante.

Esta comprobación estadística de los límites extremos de la distribución S_B Johnson solamente es posible conocerla con la utilización de la computación electrónica.

CONCLUSIONES.

Consideremos conocidos “a” y “b” para la cuenca del río San Diego (Pinar del Río), con una serie de registros hidrométricos de 18 años, y determinemos la curva de distribución de probabilidades aplicando el método S_B Johnson.

$$a = 0.4; b=2.0$$

En la Tabla 1 puede verse la secuencia de los cálculos. En las columnas 1-4 se ordenan los datos y se determinan los coeficientes modulares x_i . Seguidamente, calculamos los valores de la columna (5), utilizando la ecuación (12), que en este caso particular toma la forma:

$$\tau_i = \ln \left(\frac{x_i - 0.4}{2.0 - x_i} \right)$$

$$m_{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{18} \tau_i}{n} = -0.700$$

La esperanza matemática:

Tabla 1.

CÁLCULO DE LA CURVA DE PROBABILIDAD POR EL MÉTODO S_B JOHNSON

No.	Año	Q _i (m ³ /s)	x _i =Q _i /Q ₀	(x _i - a)	(b - x _i)	(x _i - a)/(b - x _i)	τ _i =ln(x _i -a)/(b-x _i)	(τ _i - m _τ)	(τ _i - m _τ) ²	x _i decrec	p%=(1 - (n+0.3)/(N+0.4))*100	
1	1962	3.17	1.08	0.68	0.92	0.74	-0.297	0.402	0.162	1.88	92.93	a=0.4; b=2.0
2	1963	1.29	0.44	0.04	1.56	0.03	-3.657	-2.957	8.743	1.63	87.50	
3	1964	2.15	0.73	0.33	1.27	0.26	-1.333	-0.634	0.401	1.43	82.07	Coficiente de varia
4	1965	1.37	0.47	0.07	1.53	0.04	-3.121	-2.422	5.864	1.41	76.63	C _v =r/Q ₀
5	1966	3.97	1.35	0.95	0.65	1.48	0.392	1.092	1.192	1.35	71.20	Cv=
6	1967	2.66	0.91	0.51	1.09	0.47	-0.766	-0.066	0.004	1.13	65.76	
7	1968	2.58	0.88	0.48	1.12	0.43	-0.846	-0.146	0.021	1.11	60.33	
8	1969	5.5	1.88	1.48	0.12	12.02	2.487	3.186	10.153	1.08	54.89	
9	1970	2.05	0.70	0.30	1.30	0.23	-1.468	-0.768	0.590	0.91	49.46	
10	1971	1.87	0.64	0.24	1.36	0.17	-1.743	-1.044	1.089	0.88	44.02	
11	1972	4.14	1.41	1.01	0.59	1.73	0.546	1.245	1.551	0.82	38.59	
12	1973	2.35	0.80	0.40	1.20	0.34	-1.092	-0.392	0.154	0.80	33.15	
13	1974	1.7	0.58	0.18	1.42	0.13	-2.064	-1.364	1.862	0.73	27.72	
14	1975	2.39	0.82	0.42	1.18	0.35	-1.047	-0.347	0.121	0.70	22.28	
15	1976	3.32	1.13	0.73	0.87	0.85	-0.168	0.532	0.283	0.64	16.85	
16	1977	3.24	1.11	0.71	0.89	0.79	-0.237	0.463	0.214	0.58	11.41	
17	1978	4.79	1.63	1.23	0.37	3.38	1.218	1.918	3.678	0.47	5.98	
18	1979	4.2	1.43	1.03	0.57	1.82	0.601	1.301	1.692	0.44	0.54	
								Σ=	36.085			
18	Q ₀ =	2.93		a= 0.4		b= 2	-12.594	m _τ	-0.700	r _τ	1.46	
17											2.1226	

Posteriormente calculamos la columna (6), y ordenamos x_i en orden decreciente.

La columna (8) es la probabilidad de no sobrepaso:

$$p\% = \left(1 - \frac{n + 0.3}{N + 0.4}\right) 100 \quad (16)$$

n- número de orden; N- número de años observados

Seguidamente determinamos la desviación típica:

$$\delta_\tau = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{18} (\tau_i - m_\tau)^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{36.085}{17}} = 1.46$$

Teniendo en cuenta que $1.88 \leq x_i \leq 0.44$ podemos colocar un rango de valores x_p en la columna (1) de la Tabla 2, desde 1.9 hasta 0.5 aproximadamente. Después de calcular las columnas (2) y (3), hallamos los valores de η en la columna (4).

Tabla 2

x_p	$y=(x_i - a)/(b-x_i)$	$\tau=\ln y$	$\eta=(\tau_i - m_\tau)/r_\tau$	$\eta=\Phi(q)$	Construcción de la curva		
					$p_\% = 100 - \eta * 100$	$p_\%$	x_p
1.9	15.00	2.7081	2.34	0.9904	0.96	0.96	1.9
1.8	7.00	1.9459	1.82	0.9656	3.44	3.44	1.8
1.7	4.33	1.4663	1.49	0.9319	6.81	6.81	1.7
1.6	3.00	1.0986	1.23	0.8907	10.93	10.93	1.6
1.5	2.20	0.7885	1.02	0.8461	15.39	15.39	1.5
1.4	1.67	0.5108	0.83	0.7967	20.33	20.33	1.4
1.3	1.29	0.2513	0.65	0.7422	25.78	25.78	1.3
1.2	1.00	0.0000	0.48	0.6844	31.56	31.56	1.2
1.1	0.78	-0.2513	0.31	0.6217	37.83	37.83	1.1
1	0.60	-0.5108	0.13	0.5517	44.83	44.83	1
0.9	0.45	-0.7885	-0.06	0.4761	52.39	52.39	0.9
0.8	0.33	-1.0986	-0.27	0.3936	60.64	60.64	0.8
0.7	0.23	-1.4663	-0.53	0.2981	70.19	70.19	0.7
0.6	0.14	-1.9459	-0.86	0.1949	80.51	80.51	0.6
0.5	0.07	-2.7081	-1.38	0.0838	91.62	91.62	0.5

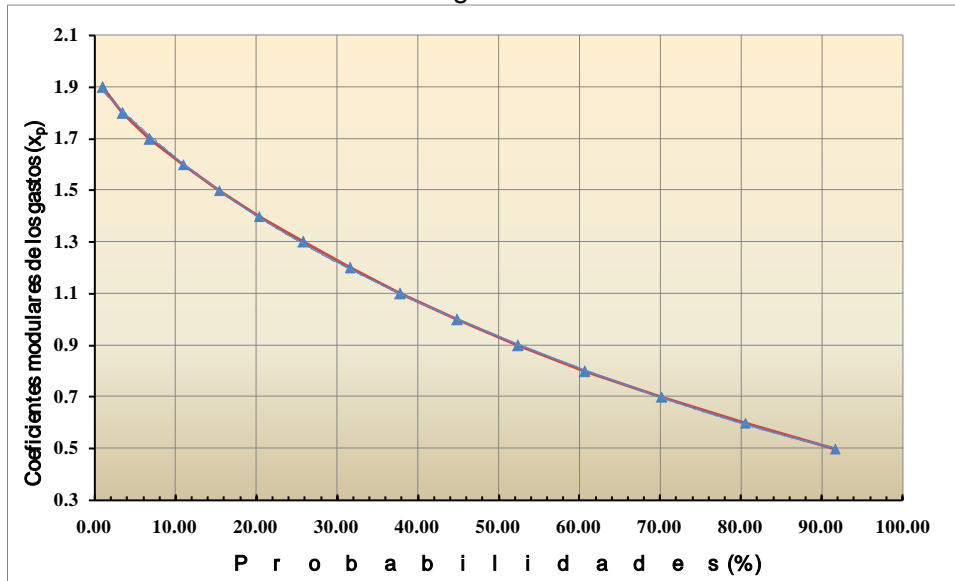
$a= 0.4$	$m_\tau -0.700$	$Cv= 0.50$
$b= 2$	$r_\tau= 1.46$	Para conocer el gasto de una probabilidad, se determina el valor de x_p por el gráfico y se aplica la ecuación $x_p * Q_0$

Finalmente, con los datos de cada η buscamos las probabilidades de no sobrepaso $\eta = \phi(q)$, en el Anexo II, página 284 del trabajo (1), convirtiéndolas en probabilidades de sobrepaso según:

$$p_\% = 100 - \eta 100 \tag{17}$$

Con los datos de $p_\%$ y x_p dibujamos la distribución de las probabilidades que, como observamos, se ajusta muy bien a los valores del escurrimiento registrado (Figura 1).

Figura 1.



BIBLIOGRAFÍA

Alexeev, G. A. (1970): Objektivniemetodyvirravnivania y normalizazykorrelazionnixsviazei. Hidrometeoizdat, Leningrad, 359 p.

Hahn, G. J. y Shapiro, S. S. (1967): Statistical models in Engineering, New York, 294 p.

Svanidze, G. G. (1977): Matematichieskiemodelirovanieguidrologicheskuizriadov. Hidrometeorizdat, Leningrad.

ANEXO II.- Valores normales de las funciones de distribuciones integrales normalizadas

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} du = \phi(u) \quad , \text{ o sea, la probabilidad de no sobrepaso}$$

$p = \phi(u)$ de los cuantiles u normalizados.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,0	0,00135	0,00097	0,00069	0,00049	0,00034	0,00024	0,00016	0,00011	0,00007	0,00005
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0014	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0024	0,0023	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0020
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0046	0,0044	0,0042	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0050	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0076	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0128	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0142
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0211	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0184
-1,9	0,0287	0,0281	0,0275	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0232
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0417	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681

-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297	0,2265	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3443	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4246
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4541
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6557	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8571	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8710	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9171
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9285	0,9279	0,9293	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545

1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9583	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9725	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9712	0,9718	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9816
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9858
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9872	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9924	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9950	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9958	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	,0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9971	0,9978	0,9979	0,9980	0,9980	0,9980
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9986	0,9986	0,9986
3,0	0,99865	0,99903	0,99931	0,99951	0,99966	0,99976	0,99984	0,99989	0,99993	0,99995