

Las Prácticas de Laboratorio: una vía para la introducción de nuevos conceptos.

Gisselle Acosta Martínez

Alfo José Batista Leyva.

Departamento de Física General y Matemática.
INTEC, Quinta de los Molinos. La Habana. CUBA.

Email: gacosta@apache.isctn.edu.cu

INTRODUCCIÓN

La descripción de los objetos naturales por su geometría es tan vieja como la ciencia en sí misma. Tradicionalmente se delimitaban los objetos naturales mediante el empleo de las líneas euclidianas (rectángulos, cuadrados, círculos, cubos, esferas, etc.) pero realmente la naturaleza no está restringida por los espacios euclidianos, por ejemplo, las nubes no son realmente esferas, las montañas no son realmente conos, las costas no son círculos y los rayos y relámpagos no son rectas, aunque se acostumbra a modelarlos de esta forma. La mayoría de los objetos naturales que están a nuestro alrededor tiene una geometría tan compleja que merece que se les llame geoméricamente caóticos. Este fenómeno fue estudiado, hace más de 30 años, por Benoit Mandelbrot. En aquel entonces parecía imposible describir estos sistemas matemáticamente.

En el año 1975 se introdujo el concepto de fractal con el fin de caracterizar estos sistemas cuantitativamente y apreciar sus regularidades fundamentales. Los márgenes de los ríos, la estructura de los retoños del brócoli, la estructura del sistema de los vasos sanguíneos y de la red de nervios la retina humana, pueden ser descritos a través de fractales.

Los fractales se pueden definir de alguna manera como sistemas que tienen autosimilitud, o sea, no importa el tamaño del objeto, éste tiene un comportamiento similar a cualquier escala. Las líneas costeras evidencian autosimilitud de estos sistemas ya que fotos tiradas a diferentes alturas desde un avión son indistinguibles entre sí, si no hay un objeto antropomorfo que permita establecer una escala. Otra característica de los sistemas fractales es que su dimensión no es un número entero o sea los sistemas fractales no son ni unidimensionales, ni bidimensionales, ni tridimensionales.

Alguno de los sistemas fractales más famosos constituyen el sistema de Julia y de Mandelbrot (ver anexo 1)

Los objetos de 3D ocupan un volumen definido que está relacionado directamente con sus dimensiones.

Si tomamos una esfera maciza observamos que tiene un volumen que está relacionado con su radio según la ecuación $\frac{4}{3}\pi r^3$, por lo que, si el objeto tiene densidad constante, su masa aumentará con r^3 . En un gráfico de m vs r , se vería una dependencia cúbica, y si tomamos logaritmos, (gráfico de log-log) obtendríamos que la pendiente de la recta resultante es igual a 3.

Este resultado es general, los objetos aumentan su masa según el cubo de sus dimensiones lineales.

En los objetos fractales no ocurre así: la masa aumenta con un exponente no entero, diferente en general de 3.

Con frecuencia nos encontramos con conceptos que no forman parte del programa de nuestras carreras a los cuales recurrimos constantemente y que nos son un poco difíciles de comprender como es el concepto de caos, de dimensión fractal entre otras que como son un tanto abstractos nos sería más fácil de entender si estuvieran vinculadas a algunas prácticas de laboratorio, en las cuales las propiedades inusuales se manifestaran en el comportamiento de objetos de uso común.

Ante esta problemática nos dimos a la tarea de diseñar una práctica de laboratorio que, cumpliendo los objetivos de una práctica de Física General (entrenar en el empleo de instrumentos de medición como la balanza analítica y el pie de rey, y en el procesamiento de los resultados experimentales) nos permite estudiar experimentalmente el comportamiento de un objeto fractal.

DESARROLLO

El objeto fractal que estudiaremos consiste en una esfera formada por papel. Para ello, formaremos esferas de distinto radio, compactando hojas de papel, y mediremos cómo varía su masa con el radio.

Métodos e instrumentos

Con el fin de examinar la relación que existe entre el radio y la masa de estas esferas y comparar los resultados con los de una esfera de 3D tomamos muestras de tres tipos de papel, que se diferencian por su densidad superficial

- papel A de densidad $\rho = 0.00430 \text{ g/cm}^2$
- papel B de densidad $\rho = 0.00275 \text{ g/cm}^2$
- papel C de densidad $\rho = 0.00498 \text{ g/cm}^2$

A cada una de las hojas le calculamos sus dimensiones con ayuda de la regla y su peso con la balanza analítica. Calculamos además su área y su densidad superficial, así como los errores relativos a cada una de estas magnitudes mediante las siguientes formulas:

$S=l*a$ donde S es el área, y l y a son el largo y el ancho respectivamente pues al ser las dimensiones uniformes se puede considerar a las hojas de papel son rectángulos.

$\rho = m/s$ siendo ρ la densidad y m el peso de las hojas

Tomamos como error de la longitud y del ancho a la menor división de la regla utilizada ($\Delta l = 0.1\text{cm}$, $\Delta a = 0.1\text{cm}$) y como error del peso a la apreciación de la

balanza analítica ($\sigma_M = 0.001\text{g}$). Luego el error del área se calcula mediante la siguiente fórmula $\Delta S = S\left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta a}{a}\right)$ y el error de la densidad se calcula mediante la expresión $\Delta\rho = \rho\left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta S}{S}\right)$. Estas son expresiones de propagación de errores que se utilizan normalmente en los laboratorios.

Procedimiento

Cada una de estas hojas la convertimos en esferas arrugando el papel hasta que estuviera lo mas compacto posible y dándole una forma que se pareciera lo más posible a la de una esfera. Luego con el pie de rey hicimos siete mediciones de su radio en distintas posiciones, y posteriormente medimos su masa con ayuda de la balanza analítica. Seguido a ello dividimos el papel a la mitad y repetimos las mediciones descritas. La división se hizo de siete a nueve veces en dependencia del tamaño del papel. Estos datos fueron procesados en el paquete Microcal Origin, y obtuvimos el gráfico de masa contra radio, el cual se expresó finalmente en la forma logarítmica - logarítmica (log – log) y con el ajuste de este gráfico a una recta por el método de los mínimos cuadrados hallamos la dependencia entre el radio y la masa

Resultados y discusión

Para evidenciar este proceso daremos los resultados de una de las muestras de papel de tipo C.

$$l = 57.8\text{cm} \quad a = 38.9\text{ cm} \quad S = 2207.9\text{ cm}^2 \quad m = 10.947\text{ g} \quad \sigma_S = 5.45\text{ cm}^2$$

$$\rho = 0.00498\text{ g/cm}^2 \quad \sigma_\rho = 2 \cdot 10^{-5}\text{ g/cm}^2$$

Dividimos la hoja a la mitad y medimos radio, la media de su radio, su masa. Luego dividimos esta mitad en su mitad repetimos la operación hasta tener 1/256 de la hoja inicial. Los valores de los radios, sus medias y sus masas para esta muestra de papel se muestran en la siguiente tabla

Tabla I: Resultados obtenidos para el papel C, hoja 1.

Radio	1/16hoj	1/32hoj	1/64hoj	1/128ho	1/256ho				
s	1 hoja	1/2hoja	1/4hoja	1/8hoja	a	a	a	ja	ja

r_1	1.93	1.07	1	0.75	0.41	0.305	0.255	0.17	0.15
r_2	2.235	1.43	0.905	0.805	0.455	0.325	0.21	0.12	0.15
r_3	2.065	1.415	0.95	0.665	0.405	0.28	0.225	0.15	0.1
r_4	2.26	1.46	0.865	0.76	0.45	0.36	0.23	0.17	0.105
r_5	2.225	1.36	1.065	0.61	0.525	0.415	0.16	0.205	0.125
r_6	2.425	1.15	0.955	0.05	0.815	0.35	0.175	0.125	0.1
r_7	2.115	1.37	0.82	0.725	0.45	0.4	0.2	0.175	0.115
		1.3221		0.6235	0.5014			0.2078	
r_m	2.17929	4	0.9371	7	3	0.34786	6	0.15929	0.12071
Masa	10.9474	5.493	2.726	1.365	0.65	0.3019	0.165	0.0757	0.0427

Donde $r_m = \frac{\sum_{i=1}^7 r_i}{7}$

En el Microcal Origin plotamos la curva de m vs r_m , y lo convertimos a log - log, hacemos el ajuste de este a una recta, y hallamos el análisis de la curva

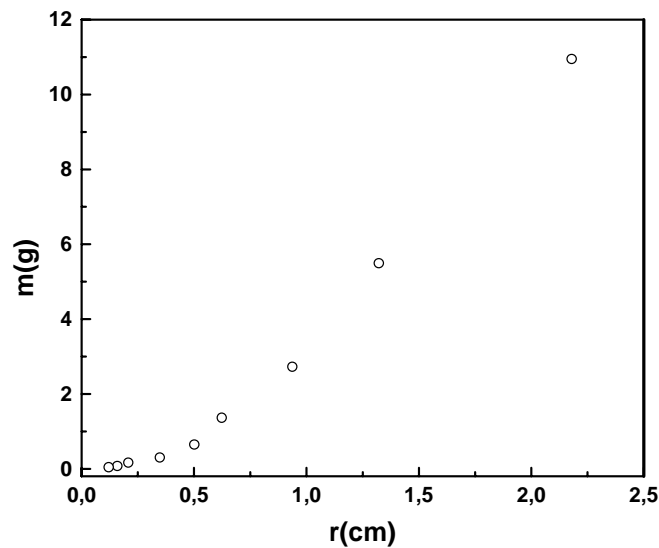


Figura 1: Gráfico de la dependencia de la masa de la esfera con su radio.

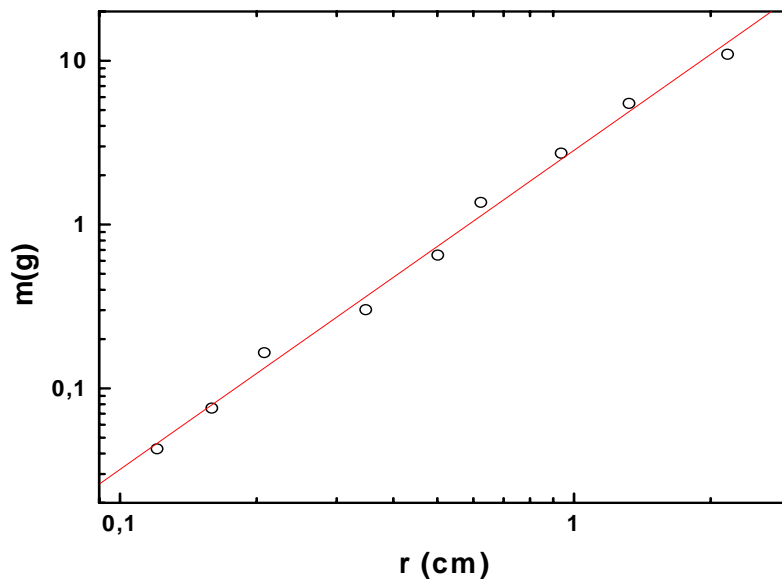


Figura 2: Igual al anterior, pero en escala log – log.

A través de este gráfico de dependencia logarítmica se obtiene el análisis de la curva siguiente, utilizando el método de los mínimos cuadrados:

$$\log m = A + B \cdot \log r.$$

Parametro	Valor	Error	
A	0.45322	0.0306	
B	1.94834	0.05904	
R	SD	N	P
0.9968	0.07142	9	<0.0001

De este análisis obtenemos el valor de la pendiente que es:

$$B = 1.95 \pm 0.06$$

o sea que la masa es proporcional a aproximadamente el cuadrado del radio. Resulta interesante el echo de que la hoja de papel, a pesar de tener una forma

esférica, continúe comportándose como si aún fuera bidimensional, lo cual nos hace relacionar este hecho con lo que ocurre con los sistemas fractales. La calidad del ajuste queda evidenciada en el valor del coeficiente de regresión (0.99).

Los resultados para las otras muestras son:

- Muestras del tipo A el valor de la pendiente promedio es de $B = 2.0 \pm 0.1$ y el coeficiente de regresión es de 0.99
- Muestras del tipo B el valor de la pendiente promedio es de $B = 2.12 \pm 0.08$ y el coeficiente de regresión es de 0.99
- Muestras del tipo C el valor de la pendiente promedio es de $B = 1.88 \pm 0.09$ y el coeficiente de regresión es de 0.99 .

Es fácil ver que la pendiente, asociada con su dimensión, está alrededor de 2, pero cambia, en dependencia de la densidad superficial del papel.

CONCLUSIONES

1. En la realización de este trabajo, que es factible de convertir en una práctica de laboratorio para alumnos de Lic. en Geografía y Lic. en Meteorología, se desarrollan las siguientes habilidades experimentales:
 - Trabajo con los instrumentos de medición fundamentales (pie de rey, balanza analítica).
 - Procesamiento de los resultados experimentales, propagación de error por cotas.
 - Confección de gráficos lineales y log - log.
 - Ajuste de datos experimentales por el método de los mínimos cuadrados.
 - Uso de paquetes de procesamiento profesionales.
2. Mediante la practica de laboratorio de sistemas fractales se puede comprobar que las esferas de papel no se comportan como objetos de 3D sino como objetos de menor dimensión, estando determinada la densidad por las dimensiones del papel por lo que podemos llegar a la conclusión de que las esferas de papel son sistemas fractales
3. Con una sola práctica de laboratorio cumplimos objetivos específicos de la física y a la vez introducimos conceptos nuevos como el de dimensión fractal.
4. Este es solo el comienzo de un trabajo que propone la introducción de conceptos novedosos a las practicas de laboratorio que espera abordar temas como circuitos caóticos, dinámica de las fracturas, que están muy relacionados a las carreras de Geografía y Meteorología

RECOMENDACIONES

- Aumentar la data experimental para distintos tipos de papel, para tratar de correlacionar la pendiente con la densidad superficial.
- Medir esferas macizas de distinto radio, para comparar con un objeto 3D.
- Se propone utilizar este trabajo como un medio didáctico en los laboratorios de Mecánica para las especialidades de Meteorología y Geografía.

