Un enfoque nuevo y más general de la hidráulica subterránea

DIOSDADO PÉREZ FRANCO

RESUMEN. Hasta muy recientemente se ha considerado que la ley de Darcy, es la ley básica de la hidráulica subterránea. La aplicación de esta ley, que establece una correspondencia lineal entre la velocidad y el gradiente hidráulico, al flujo que ocurre en acuíferos de gran conductividad hidráulica, como lo son los acuíferos kársticos cubanos, ha dado origen a contradicciones, que indican la necesidad de formular una ley no lineal para analizar correctamente la hidráulica de estos acuíferos. La nueva ley debe ser general, incluyendo el flujo lineal como caso particular, y debe poder expresarse en función de propiedades hidráulicas del medio, medibles fácilmente en el campo. Las investigaciones que reporta el autor han dado respuesta al problema, encontrando además que, al estudiar el flujo no lineal, es necesario tener en cuenta una nueva propiedad de los acuíferos, que denomina rugosidad equivalente, y que sirve para caracterizarlos junto a las propiedades ya conocidas. La ley establecida ha permitido formular una nueva base teórica para la hidráulica subterránea, que ha hecho posible, entre otras cosas, interpretar cualitativa y cuantitativamente procesos que hasta ahora no habían sido explicados satisfactoriamente; establecer nuevos criterios para definir los regímenes de flujo y sus límites; presentar una nueva imagen del flujo hacia los pozos; deducir nuevas ecuaciones que describen por primera vez el flujo no lineal en función de propiedades del acuífero, y darle un nuevo enfoque más general a la hidráulica subterránea, que trata como casos particulares los ya conocidos en la literatura.

1. INTRODUCCIÓN

Hasta muy recientemente se ha considerado como ley básica de la hidráulica subterránea la formulada por Darcy en 1856, que establece una correspondencia lineal entre la velocidad del flujo y el gradiente hidráulico. El propio Darcy señaló que la ley que él había obtenido dejaba de ser válida para velocidades mayores de un cierto límite; pero en la práctica ha resultado que, por una parte, la mayoría de las situaciones locales encontradas en la explotación del agua subterránea en el mundo pueden analizarse aplicando la ley lineal de flujo y, por otra, que si la ley lineal se aplica, es posible disponer, para el análisis de los fenómenos, de un

---

Manuscrito aprobado el 27 de junio de 1979.

D. Pérez Franco pertenece al Centro de Investigaciones Hidráulicas de la Facultad de Construcciones, del Instituto Superior Politécnico "José Antonio Echeverría" (ISPJAE).

gran arsenal de recursos matemáticos que se han ido acumulando a través del tiempo en el estudio de los fenómenos lineales, que, sin embargo, es muy escaso para fenómenos no lineales. No obstante, la aplicación de la ley de Darcy al análisis de fenómenos que ocurren en acuíferos de gran conductividad hidráulica, en algunas partes del mundo (HUYAKORN y DUDGEON, 1976; GOSSELIN y SCHOELLER, 1939) y especialmente en los acuíferos kársticos cubanos (PÉREZ, 1969) impone la necesidad de disponer de una ley no lineal de flujo, para poder analizar correctamente la hidráulica de estos acuíferos. Como veremos más adelante, se han hecho diversos intentos al respecto, en muchos lugares, pero sin llegar a obtener resultados satisfactorios.

El autor se propuso resolver este problema y obtener una ley general no lineal del flujo del agua subterránea que pudiera expresarse en función de propiedades hidráulicas intrínsecas del medio, fácilmente medibles en el campo, y que incluyera como caso particular la ley lineal de Darcy.

Las investigaciones que aquí se resumen han dado solución al problema planteado, encontrándose, además, que el enfoque no lineal exige tomar en consideración otras propiedades del medio, junto a las ya conocidas. La nueva ley establecida ha permitido formular una nueva base teórica para la hidráulica subterránea, que posibilita entre otras cosas: interpretar cualitativa y cuantitativamente procesos que hasta ahora no habían sido explicados satisfactoriamente; establecer nuevos criterios para definir el régimen de flujo existente; presentar una nueva imagen del flujo radial hacia un pozo; deducir nuevas ecuaciones que describen por primera vez el flujo no lineal en función de propiedades del acuífero, dándole un nuevo enfoque más general a la hidráulica subterránea, que permite tratar, además, como casos particulares, los ya conocidos en la literatura.

En lo que sigue, examinaremos el proceso utilizado para establecer la nueva teórica, a través de analizar: (a) la necesidad de utilizar nuevas leyes y nuevos parámetros hidráulicos del medio; (b) las leyes de flujo que es posible utilizar y sus interrelaciones.

Posteriormente examinaremos la aplicación que se ha hecho de los nuevos conceptos teóricos al análisis de algunas situaciones que se presentan más corrientemente en el flujo del agua subterránea.

2. NECESIDAD DE UTILIZAR NUEVAS LEYES Y NUEVOS PARÁMETROS HIDRÁULICOS DEL MEDIO

Se han ejecutado gran número de experimentos para determinar el rango de validez de la ley de Darcy, especialmente en condiciones de laboratorio. El autor ha hecho un análisis crítico del trabajo realizado en ese sentido por varios investigadores, que representan en general las diversas tendencias con que se han desarrollado los estudios del flujo que no sigue la ley de Darcy en medios porosos (PÉREZ, 1973*a*, 1974*b*). Por otra parte, este tipo de flujo aparece también en condiciones de campo, en algunos lugares, especialmente al extraer agua de un pozo perforado en un acuífero de alta conductividad hidráulica (HUYAKORN y DUDGEON, 1976; GOSSELIN y SCHOELLER, 1939; PÉREZ, 1969), o a través del cuerpo de una presa construida a base de materiales de granulometría gruesa (VOLKER, 1969).

En Cuba, la mayor parte de los acuíferos de importancia económica están formados por rocas carbonatadas, en su mayor parte intensamente karstificadas, y, tal como ha demostrado el autor (PÉREZ, 1969, 1970, 1973*a*, 1974*a*, 1977), lo común es que el flujo hacia los pozos en esos acuíferos no siga la ley de Darcy, y también que el flujo natural, en algunos casos, tampoco pueda analizarse bajo el criterio de correspondencia lineal establecido por dicha ley.

Ha sido costumbre atribuir a pérdidas de carga en la estructura del pozo de bombeo (filtro, rejilla, camisa), las discrepancias observadas en el campo (JACOB, 1974; RORABAUGH, 1953; LENNOX, 1966). Pero aunque esto puede ser justo en acuíferos de baja conductividad hidráulica, no es aplicable de forma general, y particularmente en los acuíferos de alta conductividad.

De todo lo anterior, resulta que la ley de Darcy no puede utilizarse para analizar de modo general el flujo del agua subterránea, y que es necesario utilizar otras experiencias para representar la relación no lineal existente entre el gradiente hidráulico y la velocidad del flujo.

Las experiencias propuestas por los distintos investigadores para representar la ley general del flujo del agua subterránea pueden clasificarse por su forma en: monómicas, binómicas, y trinómicas (PÉREZ, 1973*a*; 1974*b*; 1977), aunque ésta última forma se ha utilizado muy poco. La mayor parte de las expresiones binómicas propuestas pueden reducirse a la forma de Dupuit-Forchheimer, o sea:

$$I = aU + bU^2 \tag{1}$$

donde: I, gradiente hidráulico

U, velocidad aparente del flujo (caudal entre área de la sección transversal normal a la velocidad, $U = Q/A$) a y b coeficientes con dimensiones.

La mayoría de las expresiones monómicas utilizadas pueden representarse en forma general por la ecuación de tipo exponencial

$$U = K_n I^n \tag{2}$$

donde: K_n, conductividad hidráulica del medio para el régimen de flujo de exponente n

n, exponente del régimen de flujo (varía entre 1 y 0,5)

La conocida ley de Darcy, en esta forma, no es más que un caso particular de la ley exponencial de flujo, en que $n = 1$ y $K^n = K_D$ (conductividad hidráulica lineal o de Darcy), o sea que estaría expresada por:

$$U = K_D I \tag{3}$$

Como se sabe (SCHNEEBELI, 1966), K_D no depende solamente de las características del medio, si no también de las propiedades del flujo, según la ecuación:

$$K_D = gk/\nu \tag{4}$$

donde: g, aceleración de la gravedad

k, permeabilidad intrínseca o geométrica del medio

ν, viscosidad cinemática del fluido

Por analogía con el flujo en tuberías, algunos investigadores, por ejemplo, Krasnopolski (en BOGEMOLOV, 1966?), supusieron que el flujo que seguía la ley lineal de Darcy era laminar y que el que no la seguía sería turbulento, haciendo extensible a esta situación la ley cuadrática de flujo de Chezy, que también puede expresarse como un caso particular de la ley exponencial, en que, $n = 0,5$ y $K_n = K_T$ (conductividad hidráulica turbulenta), o sea:

$$U = K_T I^{0,5} \tag{5}$$

Como veremos más tarde, en el caso del flujo del agua subterránea, no es posible aplicar la ecuación 5 inmediatamente que deja de cumplirse la ley de Darcy y el flujo pasa dos estados diferentes, desde el momento en que deja de ser lineal hasta que puede considerarse completamente turbulento, o sea, que la transición del valor del exponente n desde 1 hasta 0,5, según aumenta el gradiente, necesita variaciones muy grandes de este último.

La situación existente hasta principios de la década del 60 era la siguiente: (a) dos enfoques posibles para formular la ley no lineal de flujo; el enfoque exponencial y el binómico; (b) la ley de Darcy para ser utilizada cuando el flujo era lineal; (c) tanto las ecuaciones exponenciales como las binómicas propuestas para el flujo no lineal habían sido derivadas a partir de correlación heurística; (d) la conductividad hidráulica K_n de las ecuaciones exponenciales propuestas sólo representaba una propiedad del medio válida para condiciones similares a las cuales se había obtenido; (e) los coeficientes a y b obtenidos para las expresiones binómicas no estaban identificados con las propiedades del medio.

Todo esto quere decir que se había logrado un enfoque más general del flujo en medios porosos, pero todavía bastante incompleto.

A partir de la década del 60, un grupo de investigadores en distintas partes del mundo se interesaron vivamente por el problema del flujo no lineal en medios porosos y se realizaron numerosos experimentos en el laboratorio con el fin de determinar la ley del flujo no lineal. De ese modo, la ley binómica de Dupuit-Forchheimer fue derivada a partir de consideraciones teóricas por varios de ellos (Ward, 1964; Sunada, 1965; Ahmed y Sunada, 1969; y muchos otros) y se propusieron varias formas de la ecuación 1, para la ley de flujo.

Al mismo tiempo, se aplicaba por otros el enfoque exponencial a trabajos de laboratorio (Dudgeon, 1966; Dilla 1976; Karadi y Nagy, 1961; Slepicka, 1961*a*; Zampaglioni, 1969; y otros) o al análisis del flujo hacia los pozos (Pérez, 1969, 1973*a*, 1974*a*; Slepicka, 1961*b*).

Como resultado, algunos investigadores consideraban que a los efectos prácticos las expresiones del tipo exponencial eran un instrumento conveniente para el análisis del flujo no lineal (Volker, 1969; Lawson y Curtis, 1970; Ahmed y Sunada, 1971; Parkin y O'Neill, 1970); sin embargo otros, (Volker, 1969) señalaban que las expresiones binómicas del tipo de la ecuación 1 eran más exactas que las exponenciales.

¿Cuál enfoque utilizar entonces? Tal como señala Pérez (1977), en los casos donde no hay grandes variaciones del gradiente, la selección del tipo de ecuación (exponencial o binómica), a los efectos de los cálculos, no es un problema importante, ya que ambas pueden adaptarse perfectamente a los datos experimentales de pérdida de carga dentro de un amplio rango del número de Reynolds.

En los casos en que existe una superficie libre sin grandes variaciones del gradiente, el uso de una expresión exponencial produce cierta simplificación analítica, ya que no es necesario considerar un coeficiente de flujo adicional, y de este modo la solución puede enfocarse por métodos más simples y más rápidos para su aplicación práctica.

Sin embargo, en casos donde las variaciones del gradiente son grandes, como en el del flujo hacia un pozo, hay ventajas sustanciales en la utilización de una expresión binómica como ley de flujo; pero hasta muy recientemente su complejidad ha hecho imposible en algunos casos el tratamiento analítico del problema.

De cualquier modo, al analizar el flujo no lineal a base de cualquiera de los dos enfoques, resulta necesario conocer los valores de los parámetros correspondientes del medio, y, lo que es más importante, determinar entre los diferentes parámetros que se han utilizado cuáles de ellos realmente caracterizan el medio y dentro de qué límites se pueden utilizar los otros parámetros que no son realmente característicos.

Dicho de otra forma, si presentamos los resultados de las distintas investigaciones realizadas con enfoque exponencial en la forma de la ecuación 2, veremos que la conductividad hidráulica K_n y el exponente n pueden considerarse constantes, si la variación del gradiente no es mayor de 10 veces; en caso contrario no pueden considerarse constantes. O sea, que los valores de n y K_n determinados para un lugar son utilizables dentro de cierto rango de gradientes, pero no pueden utilizarse indiscriminadamente para otros lugares y para gradientes muy diferentes a los que se usaron en su determinación. Por lo tanto, desde el punto de vista del enfoque exponencial, el autor se planteó dos problemas:

(a) La necesidad de encontrar una expresión general para K_n, tal que, una vez que se obtengan los valores de n y K_n, para determinadas condiciones de flujo en un medio determinado, sea posible obtener a través de ella los valores de n y K_n para cualquier otra condición de flujo en el mismo medio.

(b) La necesidad de encontrar, si fuera posible, alguna o algunas propiedades del medio, diferentes de n y K_n, que pudieran caracterizarlo desde el punto de vista hidráulico y que no estuvieran sometidas a variaciones cuando variaran las condiciones de flujo.

Por otra parte, teniendo en cuenta que las expresiones binómicas representan mejor el flujo en todo el campo cuando hay grandes variaciones del gradiente, y que hasta el momento no se había logrado de forma efectiva relacionar los coeficientes a y b de la ecuación 1 con propiedades hidráulicas características del medio, así como que existían dificultades analíticas en la aplicación del enfoque binómico a algunos problemas, el autor se propuso estudiar dos aspectos en relación con el enfoque binómico:

(a) La necesidad de relacionar los coeficientes de la fórmula binómica con propiedades hidráulicas características del medio, si éstas existían, y expresar la ley en función de esas propiedades.

(b) La necesidad de aplicar al flujo radial hacia los pozos la ley binómica de flujo obtenida en función de las propiedades características del medio y, como consecuencia, deducir ecuaciones de flujo hacia los pozos, que permitan a la vez determinar *in situ* las propiedades hidráulicas de los acuíferos.

3. LEYES DE FLUJO ADOPTADAS

Tanto si el enfoque era binómico como exponencial se necesitaba investigar si existía alguna otra propiedad del medio, aparte de las conocidas, que fuera necesario tener en cuenta al analizar el flujo no lineal.

Las propiedades normalmente consideradas al analizar el flujo lineal del agua subterránea son la conductividad hidráulica lineal, K_D, y, en el caso de régimen impermanente, el coeficiente de almacenamiento, E. Como se ha señalado, K_D no es realmente constante sino que es función de la permeabilidad intrínseca k, según lo expresado por la ecuación 4. Es costumbre además, al analizar el flujo del agua subterránea, considerar la llamada transmisibilidad lineal del medio, T_D, que es el producto del espesor del acuífero, m, por la conductividad hidráulica lineal, o sea:

$$T_D = mK_D \tag{6}$$

De modo que la permeabilidad intrínseca es en realidad la propiedad hidráulica del medio a considerar en el flujo lineal, ya que K_D y T_D son otras formas prácticas de expresarla.

A nuestro entender, uno de los aportes más importantes en relación con la correcta interpretación del flujo no lineal, fue el realizado por WARD (1964), al proponer una nueva forma del número de Reynolds para los medios porosos, tomando como longitud característica $k^{1/2}$, y obtener como ley de flujo una ecuación binómica que puede reducirse a la forma de Dupuit-Forchheimer.

El número de Reynolds propuesto por Ward, que designaremos como N_{RK}, queda expresado por la ecuación:

$$N_{RK} = Uk^{1/2}/\nu \tag{7}$$

Hasta 1964, por analogía con el flujo en tuberías, había sido costumbre para analizar el límite de validez de la ley de Darcy, representar los resultados de los experimentos en diagramas logarítmicos de valores de un coeficiente de fricción, C_f contra el número de Reynolds N_R. De una parte resultaba que, como cada investigador había seleccionado una longitud característica diferente (diámetro de partícula, diámetro de poro, etc.), los valores del N_R que se daban como límite superior de aplicación de la ley de Darcy se diferenciaban mucho entre sí (SCHEIDEGGER, 1957; PÉREZ, 1973*a*, 1973*b*) y, por otra parte, que al representar los resultados experimentales partiendo de un solo criterio para la longitud característica, aparecían curvas diferentes para diferentes medios (FANCHER *et al.*, 1933). Estas contradicciones quedaron resueltas al seleccionar Ward $k^{1/2}$ como longitud característica, ya que permitió por primera vez representar los resultados de experimentos en diferentes medios, en una sola curva de C_f vs N_{RK}, obteniendo como ley de flujo:

$$C_f = 1/N_{RK} + C \tag{8}$$

Analizando otras investigaciones posteriores a la de Ward y refinando los conceptos expuestos en algunos de sus trabajos anteriores, PÉREZ (1973*a* y 1973*b*, 1977, 1978*b*) llegó a la conclusión de que, para analizar el flujo no lineal en medios porosos, es necesario tomar en cuenta, además de k, el nuevo parámetro adimensional, C, que designa como "coeficiente de Ward" por analogía con el flujo en tuberías "rugosidad equivalente del medio", el cual es una característica intrínseca de cada medio y tiene un valor diferente según las características físicas de la estructura de cada medio.

La forma en que se presentan las curvas de C_f vs N_{RK} aparece en la Fig. 1, adaptada de ARBHABHIRAMA y DINOY (1973), y recuerdan al diagrama de Moody para tuberías. En las curvas se pueden distinguir tres zonas, la primera de izquierda a derecha, una línea recta inclinada a 45°, común a todos los medios, que representa el flujo lineal (Darciano). La segunda, una curva suave, diferente para cada medio (para cada valor de C), que termina en una recta paralela al eje de N_{RK} que forma la tercera zona, en que el flujo se hace completamente turbulento y el valor de C_f es constante e independiente de N_{RK}.

La ecuación 8 es general, pero teniendo en cuenta los valores muy pequeños de N_{RK} en la zona del flujo lineal y los valores muy grandes de

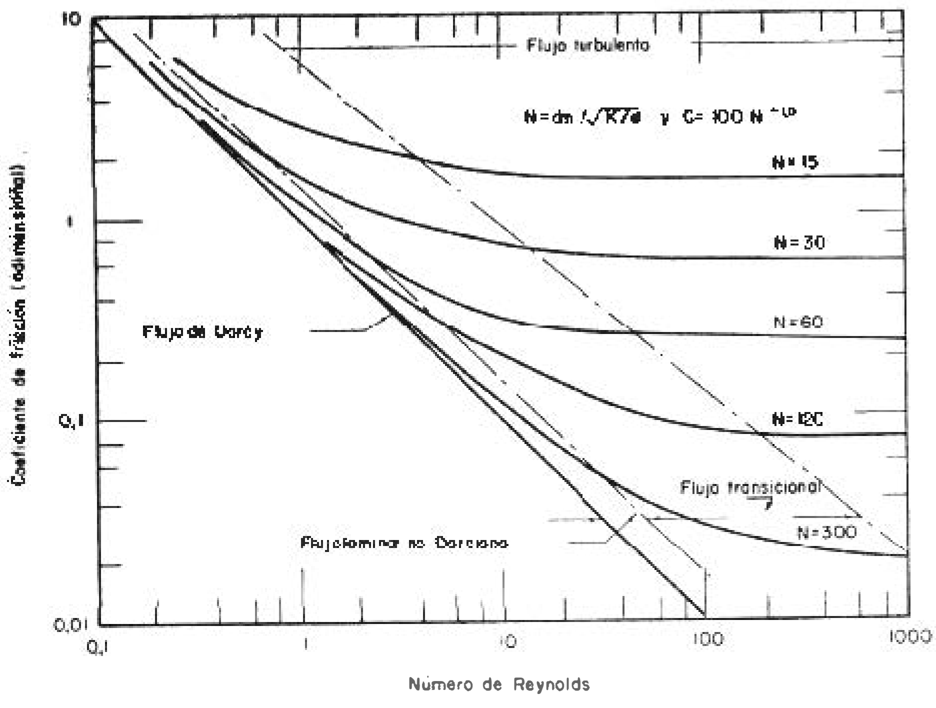

FIG. 1. Relación entre el coeficiente de fricción y el número de Reynolds (adaptado de ARBHABHIRAMA y DINOY, 1973).

N_{RK} en la zona de flujo turbulento puro, se pueden deducir de ella las expresiones aproximadas siguientes:

$$C_f = 1/N_{RK} \quad \text{(para flujo Darciano)} \tag{9}$$

y

$$C_f = C \quad \text{(para flujo turbulento puro)} \tag{10}$$

Teniendo en cuenta además que Ward expresa el coeficiente de fricción por:

$$C_f = gk^{1/2}\, I/U^2 \tag{11}$$

si combinamos las ecuaciones 7, 8, y 11, la ley de flujo de Ward puede expresarse en la forma de Dupuit-Forchheimer, como sigue:

$$I = (\nu/gk)\, U + (C/gk^{1/2})\, U^2 \tag{12}$$

De este modo los coeficientes a y b, quedan expresados por primera vez en función de propiedades intrínsecas del medio (k y C).

Así quedan resueltos dos de los problemas planteados al final del epígrafe 2: hemos encontrado las propiedades hidráulicas intrínsecas que caracterizan al medio (k y C) y hemos podido expresar la ley binómica de flujo en función de esas propiedades.

Veamos ahora, cómo se resolvió otro de los problemas allí planteados, el de obtener una expresión general para la conductividad hidráulica, K_n, en función de las propiedades intrínsecas del medio.

Aunque el autor había intentado resolver este problema (PÉREZ, 1973*a*), no fue hasta 1976 que encontró una solución adecuada (PÉREZ, 1976, 1977, 1978*f*), partiendo de combinar la ecuación 11 con la ley binómica de flujo representada por la ecuación 8 y con la expresión de la ley no lineal de flujo en forma exponencial (ecuación 2). De ese modo obtuvo la ecuación:

$$K_n = [gk^{1/2}/((1/N_{RK}) + C)]^{1/2}\, I^{1/2-n} \tag{13}$$

que representa la conductividad hidráulica en función de las propiedades intrínsecas del medio y de otros parámetros del flujo.

Para flujo lineal $n = 1$ y $K_n = K_D$, y se obtiene para la conductividad lineal a partir de la ecuación 13:

$$K_D = gk/\nu \tag{4}$$

valor que es el establecido previamente por la ecuacion 4, como relación entre K_D y k, confirmándose la generalidad de la expresión para flujo lineal.

Por otra parte, para $n = 0{,}5$, $K_n = K_T$, y se obtiene a partir de la ecuación 13 para la conductividad turbulenta:

$$K_T = (gk^{1/2}/C)^{1/2} \tag{14}$$

que expresa K_T en función de las propiedades intrínsecas k y C.

Si combinamos las ecuaciones 4, 14, y 12, veremos que esta última también puede expresarse como:

$$I = (1/K_D)\, U + (1/K_T)\, U^2 \tag{15}$$

De modo que adoptaremos como expresión "exacta" de la ley de flujo en función de las propiedades del medio, cualquiera de las dos formas representadas por las ecuaciones 12 y 15, y como expresión aproximada, la ley exponencial según la ecuación 2, en que K_n puede calcularse en función de las propiedades intrínsecas del medio a través de la expresión general de la ecuación 13.

Ambas formas de la ley no lineal incluyen como caso particular la ley de Darcy.

Por otra parte, por analogía con la transmisibilidad lineal, PÉREZ, (1978*d*) definió la transmisibilidad turbulenta, T_T, como:

$$T_T = mK_T \tag{16}$$

completando de esa forma el conjunto de propiedades del medio a tener en cuenta en el caso más general de flujo no lineal, que resultan en resumen:

k y sus asociadas K_D y T_D

C y sus asociadas K_t y T_T, y

E, o sea el coeficiente de almacenamiento.

Este conjunto de leyes y propiedades permite establecer los fundamentos de una nueva base teórica para la hidráulica subterránea con un enfoque más general, el no lineal, y resultaron el punto de apoyo para establecer nuevos criterios de análisis tanto desde el punto de vista cualitativo como cuantitativo.

4. APLICACIÓN DE LOS NUEVOS CONCEPTOS TEÓRICOS A DISTINTAS SITUACIONES DEL FLUJO DEL AGUA SUBTERRÁNEA

Los nuevos conceptos teóricos han servido para analizar desde un punto de vista más general algunos fenómenos, así como para interpretar y esclarecer otros hasta ahora no considerados (PÉREZ, 1978*d*). Aquí sólo reseñaremos tres aspectos, que consideramos de gran importancia, por la magnitud en que contribuyen a esclarecer la imagen del flujo del agua subterránea y que son: (a) la definición de los distintos tipos de flujo que pueden ocurrir en un medio saturado, y de sus límites; (b) la nueva imagen cualitativa y cuantitativa que podemos tener del flujo radial hacia un pozo; y, (c) la solución de la ecuación del flujo no lineal hacia un pozo, partiendo de la ley binómica de flujo.

5. DEFINICIÓN DE LOS DIFERENTES TIPOS DE FLUJO SATURADO Y DE SUS LÍMITES

Basándose en los experimentos de un gran número de investigadores, el autor (PÉREZ, 1973*c*) ha propuesto clasificar los regímenes de flujo del agua subterránea en seis tipos, que presentamos a continuación, agrupados según les sea aplicable o no la ley lineal de flujo de Darcy.

(a) Flujo no lineal de baja velocidad. Comprende dos tipos: régimen de no flujo y régimen de microflujo, en que no puede aplicarse la ley de Darcy.

(b) Flujo lineal. Comprende solamente el régimen de Darcy o lineal, en que es aplicable la ley de Darcy (ecuación 3), como aproximación de la ley general de flujo.

(c) Flujo no lineal de alta velocidad. Comprende tres tipos: régimen laminar transicional, régimen turbulento no desarrollado, y régimen turbulento puro. En estos tres casos resultan aplicables las dos formas generales de la ley de flujo: la exponencial (ecuación 2) y la binómica (ecuaciones 12 y 15). En el caso del flujo turbulento puro se puede utilizar como aproximación la expresión cuadrática representada por la ecuación 5.

En la práctica de la hidráulica subterránea, los regímenes de flujo que nos interesan son: el lineal, y los tres agrupados como no lineales de alta velocidad, y los límites entre ellos que resultan importantes; son los que definen a partir de qué momento es imprescindible aplicar la ley general de flujo y no puede continuarse aplicando una forma aproximada de la ley, con un grado de error admisible, ε. Se ve claramente, entonces, que los límites que nos interesa definir son el límite superior de la ley de Darcy (que separa el flujo lineal del flujo laminar transicional) y el límite inferior en que es aplicable la ley de flujo turbulento puro (que separa el flujo turbulento no desarrollado del flujo turbulento puro).

Estos límites pueden definirse por un valor crítico del gradiente I. Las investigaciones realizadas al respecto por el autor (PÉREZ, 1974*b*), y sus refinamientos posteriores (PÉREZ, 1977, 1978*d*, 1978*c*, en prensa *c*), se resumen a continuación:

El límite superior de la ley de Darcy, en función del valor crítico del número de Reynolds, N_{RKD}, y el valor crítico del gradiente, I_{crd}, expresado en función de las propiedades del medio, y de la aproximación admisible, ε, está representado por las ecuaciones:

$$N_{RKD} = \varepsilon/C = 0{,}05/C \quad (\text{para } \varepsilon = 0{,}05) \tag{17}$$

$$I_{crd} = \varepsilon\, \nu^2/gCk^{3/2} = 0{,}05\, \nu^2/gCk^{3/2} \quad (\text{para } \varepsilon = 0{,}05) \tag{18}$$

El límite inferior de aplicabilidad de la ley de flujo turbulento puro (ecuación 5), en función del número de Reynolds, N_{RKT}, y del valor crítico del gradiente, I_{crt}, expresado en función de las propiedades del medio y de la aproximación admisible, ε, está representado por las ecuaciones:

$$N_{RKT} = (1-\varepsilon)/C\varepsilon = 19/C \quad (\text{para } \varepsilon = 0{,}05) \tag{19}$$

$$I_{crt} = \left((1-\varepsilon)/\varepsilon\right)^2 (\nu^2/gCk^{3/2}) = 361\, \nu^2/gCk^{3/2} \quad (\text{para } \varepsilon = 0{,}05) \tag{20}$$

Un examen de las ecuaciones 17 con 19 y 18 con 20, nos permiten establecer las relaciones:

$$N_{RKT} = \left((1-\varepsilon)/\varepsilon^2\right) N_{RKD} = 380\, N_{RKD} \quad (\text{para } \varepsilon = 0{,}05) \tag{21}$$

$$I_{crt} = \left((1-\varepsilon)^2/\varepsilon^3\right) I_{crd} = 7\,220\, I_{crd} \quad (\text{para } \varepsilon = 0{,}05) \tag{22}$$

Las ecuaciones 21 y 22 permiten ver muy claramente la imposibilidad práctica de que en un mismo medio pueden presentarse, con un simple cambio de gradiente (y, por consiguiente, de velocidad), el flujo lineal y el turbulento puro.

En ocasiones ocurre en la práctica, que no tenemos información sobre el espesor del acuífero y, de las pruebas de pozo realizadas, sólo podemos obtener los valores de las transmisibilidades, T_D y T_T. En este caso pudiera pensarse que no es posible calcular los valores críticos del gradiente.

PÉREZ (1978*d*; en prensa *c*) ha demostrado que los gradientes críticos también pueden expresarse en función de T_D y T_T, como sigue.

$$I_{crd} = \varepsilon (T_T/T_D)^2 = 0{,}05\ (T_T/T_D)^2 \quad (\text{para } \varepsilon = 0{,}05) \tag{23}$$

$$I_{crt} = \left((1-\varepsilon)/\varepsilon\right)^2 (T_T/T_D)^2 = 361\ (T_T/T_D)^2 \quad (\text{para } \varepsilon = 0{,}05) \tag{24}$$

Un examen de las distintas ecuaciones persentadas en este epígrafe permitirá ver claramente que los valores que expresan los números de Reynolds y los gradientes críticos están dados en función de propiedades del medio, por lo que su cálculo es muy simple, lo que permitirá definir fácilmente, comparado el gradiente o el N_{RK} existe con los valores críticos, qué tipo de flujo ocurre en un momento determinado y qué ley de flujo debemos aplicar para analizarlo.

De forma sintética, puede decirse que:

(a) Si comparamos los gradientes, tendremos:

Si $I < I_{crd}$,	el flujo será lineal y aplicamos la ley de Darcy.
Si $I_{crd} < I < I_{crt}$,	el flujo será no lineal y aplicamos la ley general de flujo en cualquiera de sus dos formas.
Si $I > I_{crt}$,	el flujo será también no lineal, pero resulta del tipo turbulento puro, y podemos aplicar la ley aproximada del flujo turbulento.

(b) Si comparamos el número de Reynolds, resultará:

Si $N_{RK} > N_{RKD}$,	el flujo será lineal y aplicamos la ley de Darcy.
Si $N_{RKD} < N_{RK} < R_{RKT}$,	el flujo será no lineal y aplicamos la ley general de flujo.
Si $N_{RK} > N_{RKT}$,	el flujo será turbulento puro y podremos aplicar la ley aproximada del flujo turbulento.

Estos criterios, especialmente la comparación de gradientes, resultan de gran utilidad práctica en el análisis de distintas situaciones de flujo del agua subterránea, como, por ejemplo, en la determinación del tipo de flujo que ocurre en un acuífero en condiciones naturales, en la determinación de los tipos de flujo que ocurren alrededor de un pozo de bombeo, etc.

6. IMAGEN GENERAL DEL FLUJO RADIAL HACIA UN POZO. ZONAS Y LÍMITES

Cuando se extrae agua de un pozo, según el agua se mueve desde el radio de influencia hacia el centro del pozo, como el área a través de la cual pasa el caudal extraido, Q, disminuye en proporción a la disminución de la distancia radial, será necesario que el gradiente aumente para que pueda aumentar la velocidad en proporción a la disminución del área. Este aumento de la velocidad y del gradiente implican un aumento del número de Reynolds, según nos acercamos al pozo, lo que abre la posibilidad de que el flujo sea no lineal en una región más o menos cercana al pozo de bombeo, aún cuando en las zonas más alejadas el flujo fuese Darciano (lineal).

En general, hasta ahora, ha sido costumbre atribuir las desviaciones de la ley de Darcy, observadas en los pozos de bombeo, a pérdidas de carga a través de la estructura de los mismos, considerándose que en el acuífero propiamente dicho sólo ocurre flujo lineal. Como ya hemos señalado anteriormente, las investigaciones del autor demuestran que es posible la existencia de flujo no lineal en el acuífero, aún en zonas bastante alejadas del pozo de bombeo, especialmente en acuíferos de alta conductividad hidráulica (granulometría gruesa y rocas fisuradas, fracturadas, o con canales de disolución).

Las investigaciones realizadas por el autor (PÉREZ, 1977, 1978c) permiten definir, como imagen más general del flujo alrededor del pozo, las tres zonas de flujo y los dos límites que aparecen a continuación (Fig. 2).

(a) *Zona de flujo Darciano, o lineal,* en la región más alejada del pozo de bombeo, donde puede aplicarse la aproximación representada por la ley de Darcy, en sustitución de la ley general.

(b) *Zona de flujo no lineal,* más cercana al pozo de bombeo que la zona anterior. En esta zona es aplicable solamente la ley general de flujo

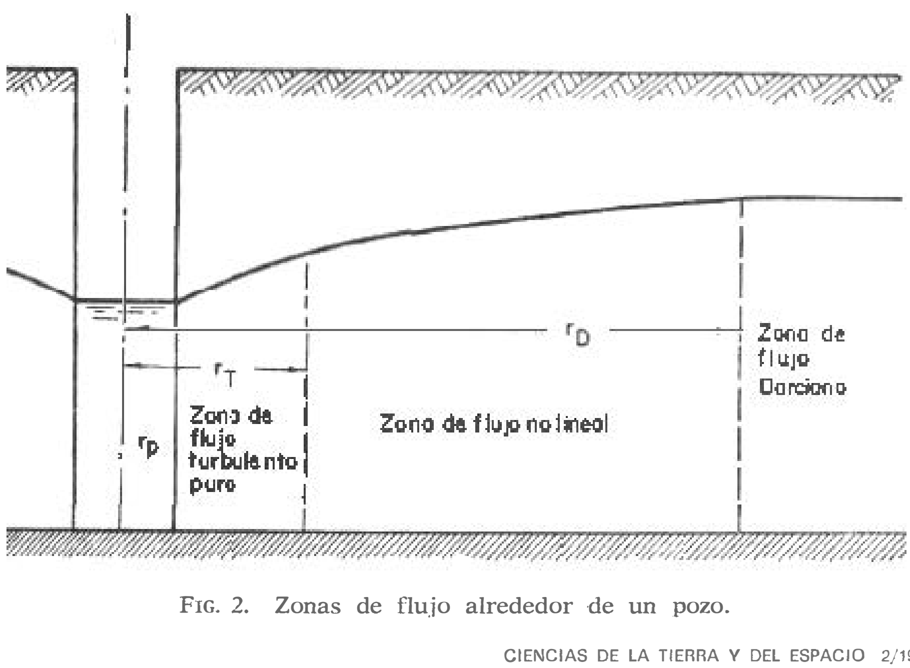

FIG. 2. Zonas de flujo alrededor de un pozo.

y en ella ocurrirá primero flujo laminar transicional y después flujo turbulento no desarrollado, según nos acercamos al pozo.

(c) *Zona de flujo turbulento puro*, en la región más inmediata al pozo de bombeo. En esta zona puede aplicarse la aproximación que representa la ley de flujo turbulento puro, en lugar de la ley general de flujo.

Los límites entre las zonas de flujo han quedado definidos como:

(a) Radio de Darcy, r_D, que separa la zona de flujo Darciano de la zona de flujo no lineal.

(b) Radio turbulento, r_T, que separa la zona de flujo no lineal de la zona de flujo turbulento puro.

Estos límites han sido definidos por PÉREZ (1978*c*), en función de las propiedades del acuífero y otros parámetros, como sigue:

$$r_D = (ck^{1/2}/\varepsilon\nu)\ (Q/2\pi m) \tag{25a}$$

que resulta para $\varepsilon = 0{,}05$:

$$r_D = ck^{1/2}/0{,}05\nu)\ (Q/2\pi m) \tag{25b}$$

Para el radio turbulento:

$$r_T = \left(\varepsilon c k^{1/2}/(1-\varepsilon)\nu\right)\ (Q{:}2\pi m) \tag{26a}$$

que para $\varepsilon = 0{,}05$, queda expresado por:

$$r_T = (ck^{1/2}/19\nu)\ (Q/2\pi m) \tag{26b}$$

Cuando no se conoce el espesor del acuífero, es posible determinar los valores de r_D y r_T, en función de las propiedades T_D y T_T. Por ejemplo, para $\varepsilon = 0{,}05$ resultará que:

$$r_D = (Q/0{,}1\pi)\ (T_D/T_T^2) \tag{27}$$

$$r_T = (Q/38\pi)\ (T_D/T_T^2) \tag{28}$$

Un examen de las ecuaciones 25, 26, 27, y 28 permite establecer la relación entre el radio de Darcy y el turbulento puro como:

$$r_D = \left((1-\varepsilon)/\varepsilon^2\right)\ r_T = 380\ r_T \quad (\text{para } \varepsilon = 0{,}05) \tag{29}$$

La ecuación 29 permite ver claramente, por ejemplo, que si $r_T = 1\ m$, la zona donde puede existir flujo lineal estaría más allá de 380 m del centro del pozo de bombeo, distancia ésta que resulta ser del orden de los valores generalmente considerados en la práctica para el radio de influencia del pozo; lo que nos indica que, en la práctica, no es probable que en el mismo acuífero en distintas zonas podamos observar al mismo tiempo flujo turbulento puro y flujo Darciano

Como las ecuaciones que representan los valores de r_D y r_T están en función, fundamentalmente, de las características del acuífero y del caudal extraido del pozo, es posible determinar cualitativa y cuantitativamente, en forma muy simple, los tipos de flujo que existirán en el acuífero para un caudal determinado y sus límites; así como definir claramente, cuándo y en qué extensión puede utilizarse una u otra expresión de la ley de flujo del agua subterránea para analizar la situación existente.

Lógicamente, no en todos los casos existirán todas las zonas de flujo. Si comparamos los valores calculados de r_D y r_T con el valor del radio del pozo, r_p, será posible definir el número de zonas existentes y el carácter del flujo en cada una, como sigue:

Si $r_D < r_p$,	soló existirá la zona de flujo Darciano y el flujo será lineal en todo el campo alrededor del pozo.
Si $r_D > r_p$ y $r_T < r_p$,	existirán solamente dos zonas de flujo: no lineal, en la zona más cercana al pozo y lineal para distancias radiales mayores que r_D.
Si $r_T > r_p$,	teóricamente pueden aparecer las tres zonas, pero en la práctica, como ya hemos señalado, es posible que no podamos considerar la existencia de una zona de flujo Darciano.

7. ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL ESTADO DE LA INVESTIGACIÓN EN RELACIÓN CON EL FLUJO DEL AGUA SUBTERRÁNEA HACIA UN POZO, A PRINCIPIOS DE LA DÈCADA DE 1970

Hasta muy recientemente, se ha utilizado fundamentalmente la ley exponencial de flujo, ya sea en sus formas particualres (ley de Darcy y ley turbulenta o en su forma general (ecuación 2), como punto de partida para derivar las ecuaciones que representan el flujo radial hacia un pozo. Partiendo de ese criterio, el abatimiento que se produce en un punto cualquiera de un acuífero, podrá representarse, como veremos a continuación, según la forma que utilicemos de la ley exponencial.

Partiendo de la ley de Darcy, DUPUIT (1863) y THIEM (1906) dedujeron ecuaciones que para el abatimiento en un punto cualquiera en flujo lineal permanente, confinado, pueden expresarse como:

$$S_D = (Q/2\pi T_D)\, \ell n\, (r_o/r) \tag{30}$$

donde: S_D, abatimiento lineal en un punto situado a la distancia radial r del centro del pozo de bombeo.

r_o, radio de influencia del pozo.

Para flujo permanente turbulento, partiendo de las ecuaciones propuestas por PÉREZ (1969), el abatimiento en un punto cualquiera, en un acuífero confinado, puede expresarse como:

$$S_T = Q^2 (r_o - r) / 4\pi^2 T_T^2 r\, r_o \tag{31}$$

donde: S_T, abatimiento turbulento en un punto situado a una distancia radial r, del centro del pozo de bombeo.

De igual modo, puede derivarse una expresión para el abatimiento, de acuerdo con los resultados de PÉREZ (1974*a*) sobre el flujo no lineal permanente hacia un pozo, partiendo de la expresión general de flujo en forma exponencial, que represente lo que ocurre cuando el flujo es laminar transicional o turbulento no desarrollado, y que estaría en función de n y K_n, o sea, para ser utilizada en los casos en que no sean aplicables las ecuaciones 30 ó 31.

Esta expresión tiene la limitación de que n y K_n sólo pueden considerarse constantes cuando las variaciones del gradiente no son mayores de 10 veces, y que para aplicarla es necesario utilizar un procedimiento de cálculo relativamente complejo, desarrollado por el autor (PÉREZ, 1976). Sin embargo, hasta fecha reciente era la única manera disponible de analizar en forma general el flujo no lineal permanente hacia un pozo, en acuíferos confinados y freáticos.

Aunque hay expresiones equivalente a las ecuaciones 30 y 31 para acuíferos freáticos, es costumbre utilizar como expresiones aproximadas para dichos acuíferos, cuando el espesor saturado es grande en relación con el abatimiento, dichas ecuaciones derivadas para acuíferos confinados.

Hasta 1935, el análisis del flujo hacia los pozos sólo podía hacerse sin tener en cuenta las variaciones en el tiempo, o sea, en condiciones de flujo permanente (de equilibrio). Los trabajos de THEIS (1935) dieron un vuelco a la hidráulica subterránea, al presentar por primera vez la ecuación del flujo impermanente hacia un pozo en régimen lineal para un acuífero confinado. La ecuación de Theis se puede expresar como:

$$S_D = (Q/4\pi T_D) \int_u^\infty (e^{-u}/u)\, du = Q/4\pi T_D\, W(u) \tag{32}$$

donde u es un parámetro adimensional cuyo valor se calcula por:

$$u = r^2 E/4\, T_D t \tag{33}$$

en que t es el tiempo transcurrido a partir de que comienza el bombeo.

La integral exponencial de la ecuación 32 se representa simbólicamente por $W(u)$ (función de pozo de Theis) y su solución se puede obtener a través de tablas que se han publicado, algunas incluidas en libros de texto (WISLER y BRATER 1959; TODD, 1959), o por el procedimiento de comparación con curvas tipo.

A partir de los trabajos de THEIS (1935), COOPER y JACOB (1946) propusieron una solución aproximada de la ecuación 32 para valores grandes del tiempo, t, la cual puede expresarse como:

$$S_D = (Q/4\pi\, T_D)\, \ln (2{,}246\, T_D t/r^2 E) \tag{34}$$

Esta última expresión se conoce como fórmula de Jacob.

Aunque, han sido derivadas para flujo lineal en acuíferos confinados, las ecuaciones de Theis y de Jacob se aplican también a acuíferos freáticos ó libres.

BOULTON (1954) propuso una fórmula más general para la solución del flujo lineal impermanente en acuíferos freáticos.

El modelo analítico del que parten Theis, Jacob, y Boulton supone que el acuífero es homogéneo e isotrópico y establece otras limitaciones que son clásicas en la deducción de ecuaciones de este tipo, desde Dupuit y Thiem hasta nuestros días (PÉREZ, 1978*d*; WISLER y BRATER, 1959; TODD 1959).

Sin embargo, según ha pasado el tiempo y se ha podido disponer de métodos más efectivos de análisis, así como del recurso de la computación digital, los modelos analíticos han ido complicándose más y han sido resueltas para el flujo lineal situaciones cada vez más complejas, según puede verse al consultar alguna obra que trate la hidráulica de pozos (por ejemplo, PÉREZ, 1978*d*; KRUSEMANN y RIDDER, 1970); aunque muchas de las soluciones obtenidas implican la utilización de curvas tipos y procedimientos complejos de análisis.

En resumen, podemos decir que, aproximadamente en 1973, la situación de las investigaciones respecto al flujo del agua subterránea hacia un pozo era la siguiente:

(a) *En régimen lineal.* Un avance extraordinario, tanto para condiciones de flujo permanente como impermanente, no sólo para situaciones sencillas de flujo en condiciones de homogeneidad e isotropía, sino también para diferentes grados de confinamiento, anisotropía, acuíferos múltiples, acuíferos de espesor variable, etc.

(b) *En régimen no lineal.* Poco avance. Sólo estaba resuelto el caso particular de flujo turbulento para acuíferos confinados y freáticos, en régimen permanente, y el caso general de flujo permanente no lineal con enfoque exponencial, en acuíferos confinados y freáticos, con grandes limitaciones de aplicación, algunas de las cuales se resolvieron en parte en años posteriores, como ya se ha señalado. Además, como veremos posteriormente, se había intentado solucionar el flujo permanente partiendo de la ley binómica, pero sin poder relacionar las ecuaciones con propiedades hidráulicas características del medio. Nada se había hecho en relación con el régimen impermanente.

8. UTILIZACIÓN DE LA LEY BINÓMICA DE FLUJO EN EL ANÁLISIS DEL FLUJO RADIAL HACIA LOS POZOS

El enfoque exponencial para el análisis del flujo hacia un pozo, se utilizó, princialmente, por la menor complejidad analítica de las ecuaciones diferenciales que era necesario resolver, así como porque el estado de las investigaciones hasta cierto momento, no permitía relacionar los parámetros de la ley binómica de flujo (considerada más exacta que la exponencial) con propiedades hidráulicas características del medio. La solución, con enfoque exponencial, propuesta por el autor (PÉREZ, 1973*a*; 1974*a*), tenía limitaciones que fueron posteriormente resueltas en gran parte (PÉREZ, 1976), pero que no permitían aún darle soluciones sencillas y generales al problema.

En esa última fecha habia sido posible para el autor expresar la ley binómica de flujo, en función de propiedades características del medio, tal como se puede ver en el epígrafe 3. Y como las expresiones binómicas se adaptan mejor a la descripción de flujo en todo el campo, para grandes variaciones de velocidad y, por consiguiente, del número de Reynolds, y del gradiente, como es el caso del flujo radial hacia un pozo; a pesar de su mayor complejidad analítica, resultaba oportuno intentar utilizar la ley representada por las ecuaciones 12 y 15 como punto de partida para obtener las ecuaciones del flujo radial hacia un pozo, sobre todo teniendo en cuenta la menor exactitud y los inconvenientes señalados al enfoque exponencial.

Partiendo de sus propias investigaciones y de las de otros investigadores, el autor ha elaborado una solución analítica completa para el problema del flujo no lineal permanente e impermanente hacia un pozo, en un acuífero confinado, con enfoque binómico (PÉREZ, 1977, 1978*a*). La solución está dada en función de las propiedades hidráulicas características del medio y es lo suficientemente simple para ser aplicada sin dificultades en la práctica diaria de la ingeniería, tanto al análisis del flujo no lineal hacia un pozo, como a la determinación *in situ* de las propiedades hidráulicas de los acuíferos, a través de pruebas de pozo.

Analizada la situación del flujo no lineal permanente hacia un pozo en un acuífero confinado, partiendo de la ley binómica expresada por la ecuación 15, el autor obtuvo para el abatimiento, S_r, en un punto situado a la distancia radial r, del centro del pozo, una expresión que teniendo en cuenta las relaciones entre T_D y K_D y entre T_T y K_T (ecuaciones 6 y 16) queda transformada en:

$$S_r = (Q/4\pi T_D)\ \ell n\ (r_o/r) + Q^2(r_o - r)/4\pi^2 T_T^2 r\ r_o \qquad (35)$$

Un examen atento de la ecuación 35 permite llegar a una conclusijn muy importante: la primera parte del segundo miembro es la ecuación de Dupuit-Thiem para calcular el abatimiento en flujo lineal permanente (ecuación 30) y la segunda parte del segundo miembro es la ecuación propuesta por Pérez Franco para calcular el abatimiento en flujo permanente turbulento puro (ecuación 31). Por consiguiente, el abatimiento producido por flujo no lineal permanente a la distancia r, del centro del pozo de bombeo, para un caudal constante, Q, se obtiene sumando el abatimiento que se produciría para flujo lineal, con ese caudal (componente lineal o Darciana), con el abatimiento que se produciría para flujo turbulento puro, también para dicho caudal constante, Q (componente turbulenta). De modo que la ecuación 35 puede expresarse sintéticamente por:

$$S_r = S_D + S_T \qquad (36)$$

Partiendo de la ecuación 35, tal como se demuestra en las referencias 11 y 52, es posible determinar las propiedades hidráulicas de un acuífero, a partir de pruebas de pozos llevadas al equilibrio (régimen quasi-permanente), por un procedimiento analítico muy sencillo.

Aunque en el campo de la minería se habían hecho algunos intentos de expresar las ecuaciones del flujo permanente hacia un pozo, partiendo de la ley binómica (PUHACHEV, 1961; SCHMIEDER, 1971, 1976), los resultados obtenidos en ambos casos no estaban correlacionados completamente con propiedades hidráulicas características del medio.

Por otra parte, recientemente, HUYAKORN (1973) y HUYAKORN y DUDGEON (1976), aplicaron la ecuación binómica de Dupuit-Forchheimer (ecuación 1) al flujo no lineal hacia un pozo (lo que ellos llaman "flujo en dos regímenes"). La solución que ellos presentan ha sido obtenida a través de la técnica numérica del elemento finito y recurriendo a la utilización de "curvas tipo", difíciles de aplicar a la dterminación *in situ* de las propiedades hidráulicas de los acuíferos. Además, puede señalarse que parten, en nuestra opinión, de una concepción inadecuada del número de Reynolds, y que no relacionan los parámetros de flujo que utilizan, con las propiedades hidráulicas características.

No obstante, consideramos que Huyakorn y Dudgeon han hecho una contribución muy importante a la hidráulica no lineal de los pozos, tal como veremos inmediatamente. Estudiando sus trabajos de investigación, puede llegarse a la conclusión de que, para diferentes condiciones de confinamiento, el abatimiento, S_r, a una distancia radial r, a partir del centro del pozo de bombeo, se compone de dos partes: una que equivale al abatimiento que ocurriría en el medio si el flujo fuera lineal, S_D, y la otra, que designaremos como S_{ND}, y que resulta un abatimiento adicional, debido a la no linealidad del flujo. Lo anterior puede expresarse como sigue:

$$S_r = S_D + S_{ND} \tag{37}$$

Esta conclusión es similar a la obtenida por el autor y expresada por la ecuación 36, pero más general, ya que, además, han determinado que S_D es proporcional al caudal Q y que varía con el tiempo para condiciones impermanentes de flujo, y que S_{ND} es proporcional a Q^2, pero que aún con flujo impermanente no varía con el tiempo para un caudal constante, es decir, que se mantiene constante. A nuestro entender, este es el resultado más relevante que puede derivarse de sus investigaciones. De acuerdo con lo anterior, podemos decir que:

$$S_D = B(t)Q \tag{38}$$

y,

$$S_{ND} = DQ^2 \tag{39}$$

De lo que resulta que la ecuación 37 puede transformarse en:

$$S_r = B(t)Q + DQ^2 \tag{40}$$

donde: $B(t)$, representa un coeficiente que corresponde al abatimiento debido a flujo lineal (Darciano), para las condiciones de confinamiento existentes en el acuífero. Este coeficiente varía con el tiempo y con las condiciones de confinamiento.

D, un coeficiente constante para las condiciones de confinamiento existentes en un acuífero de propiedades hidráulicas determinadas.

FORBES (1970) también ha encontrado evidencias experimentales de la invariabilidad en el tiempo de un término similar a DQ^2.

El autor, a partir de los resultados de HUYAKORN y DUDGEON (1976) para flujo impermanente en general, y de los obtenidos por él al analizar el flujo permanente no lineal en un acuífero confinado (ecuaciones 35 y 36), ha desarrollado una solución analítica completa para el flujo no lineal impermanente en un acuífero confinado (PÉREZ, 1977, 1978*a*), que presentamos brevemente a continuación.

Por otra parte, HUYAKORN (1973) probó que, en el caso de un acuífero confinado, el término $B(t)Q$ está representado por la ecuación de flujo lineal impermanente hacia un pozo, o sea, la fórmula de no equilibrio de Theis (ecuación 32), de modo que para este caso la ecuación 40 quedaría transformada en:

$$S_r = (Q/4\pi\, T_D)\; W(u) \;+\; DQ^2 \qquad (41)$$

Como sabemos, si transcurre tiempo suficiente, las condiciones tenderán al equilibirio (flujo permanente) y la fórmula de Theis puede sustituirse por la aproximación de Jacob (ecuación 34), de modo que la parte lineal de la ecuación 41 quedaría representada por dicha ecuación, que además puede expresarse en la siguiente forma:

$$S_D = (Q/2\pi\, T_D)\, \ell n \,[\,(2{,}246\, T_D t/E)^{1/2}/r\,] \qquad (42)$$

La ecuación 42 es equivalente a la fórmula de equilibrio de Dupuit-Thiem (ecuación 30) con $r_o = (2{,}246\, T_D t/E)^{1/2}$, que a todos los efectos prácticos podemos considerar coincidente con el radio de influencia observado para valores suficientemente grandes de t, para poder considerar que se ha alcanzado el equilibrio. Luego para condiciones de equilibrio, la ecuación 41 quedaría transformada en:

$$S_r = (Q/2\pi\, T_D)\, \ell n\, (r_o/r) \;+\; DQ^2 \quad \text{(equilibrio)} \qquad (43)$$

Hemos llegado a la ecuación 43, analizando la aplicación de los conceptos generales elaborados por Huyakorn a las condiciones particulares del flujo no lineal permanente en un acuífero confinado. Por otra parte, partiendo de la ley binómica de flujo, el autor obtuvo para esas mismas condiciones la ecuación 35; si comparamos los segundos miembros de las ecuaciones 35 y 43 veremos que el primer término de ambas ecuaciones es el mismo, lo que implica que también deben ser iguales los segundos términos, o sea:

$$DQ^2 \qquad Q^2\,(r_o - r)\,/4\pi^2 T_T{}^2 r\, r_o \qquad (44)$$

Este resultado implica que, en el caso de flujo no lineal en acuífero confinado, el término DQ^2, que no varía con el tiempo, queda expresado por la componente turbulenta del abatimiento y que esta componente se mantiene constante a través del tiempo para el mismo caudal. Y, por consiguiente, a partir de este resultado podemos llegar a la importante conclusión de que el abatimiento a una distancia r del centro del pozo de bombeo, para flujo radial impermanente confinado no lineal, está expresado por:

$$S_r = (Q/4\pi T_D)\, W(u) + Q^2(r_o - r)/4\pi^2 T_T^2 r\, r_o \tag{45}$$

La ecuación 45 puede también expresarse en función de k y C ó de K_D y K_T, haciendo las transformaciones correspondientes. Para tiempos suficientemente grandes, la ecuación 45 se puede transformar, utilizando la aproximación de Jacob, en:

$$S_r = (Q/4\pi T_D)\, \ell n\, (2{,}246\, T_D t/r^2 E) + Q^2(r_o - r)/4\pi^2 T_T^2 r\, r_o \tag{46}$$

Como ha demostrado el autor (PÉREZ, 1977, 1978*a*, 1978*d*, en prensa *b*), partiendo de las ecuaciones 45 y 46 pueden utilizarse dos métodos analíticos sencillos para obtener las propiedades hidráulicas características de los acuíferos a través del análisis de los resultados de pruebas de bombeo, sin necesidad de utilizar procedimientos complejos de análisis o de superposición de los resultados con curvas tipo.

Los procedimientos de análisis antes mencionados se han aplicado también con buenos resultados a acuíferos libres. Recientemente el autor ha publicado las conclusiones de sus investigaciones respecto a aplicar el enfoque binómico a pruebas de bombeo realizadas con abatimiento escalonado (PÉREZ, en prensa *a*).

9. CONCLUSIONES

1. Se ha logrado establecer una nueva base teórica para la hidráulica subterránea, definiendo claramente las propiedades características de los acuíferos y las leyes de flujo que deben aplicarse. Esta nueva base no lineal es más general que la que existía hasta el presente e incluye como casos particulares los fenómenos lineales.

2. Los nuevos conceptos teóricos establecidos han permitido en la hidráulica subterránea analizar nuevas situaciones e interpretar otras que hasta el presente no tenían explicación satisfactoria. Entre los problemas resueltos podemos citar:

   (a) La obtención de nuevos criterios cualitativos y cuantitativos para definir los tipos de flujo del agua subterránea.

(b) La definición cualitativa y cuantitativa de las zonas de flujo que pueden formarse alrededor de un pozo, y de sus límites.

(c) El haber llegado a desentrañar, al resolver la ecuación del flujo hacia un pozo con enfoques binómicos, el origen y composición del abatimiento que se produce con flujo no lineal, en función por primera vez de propiedades hidráulicas características del medio, que puedan ser determinadas fácilmente *in situ.*

(d) La aplicación inmediata de todos los resultados a la situación específica existente en los acuíferos cubanos.

3. El nuevo enfoque teórico y el gran número de problemas resueltos o reinterpretados, permite darle a la hidráulica subterránea un nuevo enfoque más general, cuya primera versión puede expresarse a través del libro que ha preparado el autor (PÉREZ, 1978*d*). Esto premite, además, la apertura de un vasto campo de investigación dentro de la hidráulica subterránea.

REFERENCIAS

AHMED, N., y SUNADA, D. K. (1969): Nonlinear flow in porous media. *J. Hydraulics Div., Proc. A. S. C. E.,* 95(HY6):1847-1857.

———— (1971): Discussion closure of nonlinear flow in porous media. *J. Hydraulics Div., Proc. A. S. C. E.,* 97(HY8):1233-1234.

ARBHABHIRAMA, A., y DINOY, A. A. (1973): Friction factir and Reynolds number in porous media flow. *J. Hydraulics Div., Proc. A. S. C. E.,* 99(HY6):901-911.

BOGOMOLOV, G. (1966?): *Hydrogéologie et notions de géologie d'ingenieur.* Editions de la Paix, Moscú, 278 pp.

BOULTON, N. S. (1954): The drawdown of the water table under nonsteady conditions near a pumped well in an unconfined formation. *Proc. Inst. Civil Engin.,* 3:564-579.

COOPER, H. H., y JACOB, C. E. (1946): A generalized graphycal method for evaluating formation constants and summarizing well field story. *Trans. Amer. Geophys. Union,* 27:526-334.

DARCY, H. (1856): *Les fontaines publiques de la ville de Dijon.* V. Dalmont, Paris, 647 pp.

DILLA, F. (1976): Obtención de la ley exponencial para flujo no lineal en medios porosos. *Tecnología,* Ser. Ing. Hidráulica, 34.

DUDGEON, C. R. (1966): An experimental study of the flow of water through corse granular media. *La Houille Blanche,* 21(7):785-800.

DUPUIT, J. (1863): *Etudes theoriques et practiques sur le mouvement des eaux.* Paris, 2da edn., 304 pp.

FANCHER, G. H., LEWIS, J. A., y BARNES, K. B. (1933): Some physical characteristics of oil sands. *Bull. Penn. State College Min. Indus., Exper. Sta. State College,* 12:65-171.

FORBES, C. F. (1970): Theory and appraisal of hydraulic conditions in wells. En *Proc. Ground-water Symp., Rep. Water Res. Lab. New South Wales,* 113:28-49.

GOSSELIN, M., y SCHOELLER, H. (1939): Observations sur le debit de puits artésiens. En *Asamblea General de Washington de la Asociación Internacional de Hidrología Científica,* Commission des Eaux Souterraines, Question 3 —Rapport 7.

HUYAKORN, P. S. (1973): Finite element solution of two-regime flow towards wells. *Rep. Water Res. Lab. Univ. New South Wales,* 137:1-191.

HUYAKORN, P. S., y DUDGEON, C. R. (1976): Investigation of two regime well flow. *J. Hydraulics Div., Proc. A. S. C. E.,* 102(HY9):1149-1165.

JACOB, C. E. (1947): Drawdown test to determine effective radius of artesian well. *Trans. A. S. C. E.,* 112:1047-1070.

KARADI, G., y NAGY, I. V. (1961): Investigations into the validity of the linear seepage law. *Proc. Ninth Convention Internatl. Assoc. Hydraulic Res.,* pp. 556-566.

KRUSEMAN, G. P., y RIDDER, N. A. DE (1970): Analysis and evaluation of pumping test data. *Internatl. Inst. Land Reclamation Improvement, Waganingen, The Netherlands, Bull.,* 11:1-200.

LAWSON, J. D., y CURTIS, R. P. (1970): Discussion of non-linear flow in porous media. *J. Hydraulics Div., Proc. A. S. C. E.,* 96(HY7):1632-1633.

LENNOX, D. H. (1966): Analysis and application of step-drawdown test. *J. Hydraulics Div., Proc. A. S. C. E.,* 92(HY6):25-48.

PARKIN, A. K., y O'NEILL, T. C. (1970): Discussion of non-linear flow in porous media by finite elements. *J. Hydraulics Div., Proc. A. S. C. E.,* 96(HY7):375-376.

PÉREZ FRANCO, D., (1969): Análisis del flujo hacia un pozo en régimen permanente turbulento y su aplicación a los acuíferos cubanos. *Tecnología,* ser. Ing. Hidráulica, 2:1-16.

———— (1970): Ocurrencia del régimen turbulento en la captación de aguas subterráneas. En *Memoria IV Congreso Latinoamericano de Hidráulica,* México, 1970, 2:63-71.

———— (1973*a*): *Non-Darcy flow of ground water towards wells and trenches, particularly within the turbulent range of seepage.* Ph. D. Thesis, Technical University of Budapest, Faculty of Civil Engineering.

———— (1973*b*): La raíz cuadrada de la permeabilidad geométrica como longitud característica en el número de Reynolds para el flujo en medios porosos. *Tecnología,* ser. Ing. Hidráulica, 17:1-16.

———— (1973*c*): Caracterización de los regímenes de flujo del agua subterránea. *Tecnología,* ser. Ing. Hidráulica, 18:1-11

———— 1974*a*): Flujo del agua hacia un pozo en régimen permanente no lineal. *Tecnología,* ser. Ing. Hidráulica, 19:1-14.

———— (1974*b*): Algunas consideraciones sobre el flujo del agua subterránea. *Tecnología,* ser. Ing. Hidráulica, 25:1-74.

————(1976): Bases de una nueva metodología para la determinación de las características de los acuíferos en régimen permanente no lineal. *Tecnología,* ser. Ing. Hidráulica, 35:1-17.

———— (1977): *Theoretical and practical investigation into the non-linear seepage law.* Tesis para el grado de Dr. en Ciencias Técnicas, Academia de Ciencias Húngara, Budapest.

——— (1978*a*): Flujo no lineal permanente e impermanente hacia un pozo en un acuífero confinado. *Cien. Téc., Ing. Hidráulica,* 2:115-135.

——— (1978*b*): A new parameter for non-linear flow in porous media. *J. Hydrol. Sci.,* 5(2):127-131.

———(1978*c*): Imagen general del flujo radial hacia un pozo. Zonas y límites. *Voluntad Hidráulica.* 47/48.

——— (1978*d*): *Hidráulica subterránea.* (Cap. I-VI), Edición mimeografiada, ISPJAE, 312 pp.

——— (1978e): On the regimes of saturated flow of ground water and their limits. *Hidrologiai, Közlöny,* Hungría, pp. 174-176.

——— (1978*f*): *A general expression for representing hydraulic conductivity in ground water flow.* Vizügyi Közlemenyek, Hungría, pp. 203-207.

——— [en prensa, *a*]: Pruebas de pozo con abatimiento escalonado en régimen no lineal impermanente. *Cien. Téc., Ing. Hidráulica,* 1979.

——— [en prensa, *b*]: Un segundo método para calcular las propiedades hidráulicas de un acuífero por prueba de pozo con flujo no lineal. *Voluntad Hidráulica,* 1979.

——— [en prensa, *c*]: Límite de los regímenes de flujo del agua subterránea en función de las propiedades del medio. *Voluntad Hidráulica,* 1979.

PUHACHEV, G. B. (1961): *Hidráulica subterranea* [en ruso]. Moscú, 387 pp.

RORABAUGH, M. I. (1953): Graphical and theoretical analysis of step-drawdown test of artesian well. *Proc. A. S. C. E.,* 362:1-27.

SCHEIDEGGER, A. E. (1957): *The physics of flow through porous media.* The Macmillan Company, Nueva York, 236 pp.

SCHMIEDER, A. (1971): Paramétres hydrauliques de roches aquiferes principales a eaux karstiques du massif central hongrois de la Transdanubie et les possibilites de pronostic du debit d'eau. *Acta Geodaet, Geophys. Montanist. Acad. Sci. Hung.,* 6(3-4):429-448.

——— (1976): Fakadó karsztvizhozam, analitikus meghatározásának lehetösége [en húngaro]. *MTAX Osztályának Közleményei,* 9(3-4):173-187.

SCHMIEDER, A., KESSERÚ, Z., JUHÁSZ, J., WILLEMS, T., y MARTOS, F. (1975): *Vízveszély és vizgazdálkodás a banyaszathan* [en húngaro]. Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 447 pp.

SCHNEEBELI, G. (1966): *Hydraulique souterraine.* Eyrolles, Paris, 362 pp.

SLEPICKA, F. (1961*a*): The laws of filtration and limits of their validity. *Proc. Ninth Convention Internatl. Assoc. Hydraulic Res.,* pp. 383-394.

——— (1961*b*): Hydraulic function of a cilindrical well in an artesian aquifer with regard to new research on flow through porous media. *Proc. Ninth Convention Internatl. Assoc. Hydraulic Res.,* pp. 395-407.

SUNADA, D. K. (1965): Turbulent flow through porous media. *Hydraulic Laboratory University of California Berkeley, Water Resources Center Contribuition,* 103:1-52.

THEIS, C. V. (1935): The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage *Trans. Amer. Geophys. Union,* 16:519-524.

THIEM, G. (1906): *Hydrologische Methoden.* J. M. Gebhart, Leipzig, 56 pp.

TODD, D. K. (1959): *Ground Water Hydrology*. John Wiley and Sons, Nueva York, 336 pp.

VOLKER, R. E. (1969): Nonlinear flow in porous media by finite elements. *J. Hydraulics Div., Proc. A. S. C. E.* 95(HY6):2093-2114.

WARD, J. C. (1964): Turbulent flow in porous media. *J. Hydraulics Div., Proc. A. S. C. E.,* 90(HY5):1-12.

WISLER, C. O. y BRATER, E. F. (1959): *Hydrology.* John Wiley and Sons, Nueva York, 2da edn., 408 pp.

ZAMPAGLIONI, D. (1969): Turbulent seepage flow in filters. *Proc. 13th Congr. Internatl. Assoc. Hydraulic Res.,* 4:167-173.

ABSTRACT. Until recently, Darcy's law has been considered as the basic law for groundwater flow. This law establishes a linear correspondance between velocity and hydraulic gradient. The utilization of Darcy's law for describing the flow in high conductivity aquifers, like the Cuban karstic underground reservoirs, originates contradictions that point out the necessity of utilizing a non-linear law for the hydraulic analysis of this type of media. The new law should be general and should be expressed as a funtion of characteristic hydraulic properties of the media, including linear flow as a particular case. The research work reported by the author have given a solution to the question, finding in addition that when dealing with nonlinear flow it is necessary to consider a new property of the medium that he calls equivalent roughness, besides the properties already known. As a result, it is possible to establish a new theoretical base for groundwater hydraulics, making also possible, among other things: to interpret qualitatively and quantitatively certain processes not satisfactorily explained before; to define new criteria for recognizing the regimes of flow and their limits; to present a new image of the radial flow towards wells, to derive new equations that describe for the first time non-linear flow as a funtion of hydraulic properties of the aquifers, and to provide a new general approach to groundwater hydraulics that includes as particular cases those already shown in current literature on the subject.

CDU 556.342:532.546